Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра прочности летательных аппаратов

Паспорт
расчетно-графического задания (работы)

по дисциплине «Практикум по алгоритмизации и программированию», 3 семестр

1. **Методика оценки**

В семестре студенты выполняют два расчетно-графического задания (работы) (РГЗ)(Р).

В рамках первой РГЗ студенты должны рассчитать на растяжение-сжатие прямой брус переменного сечения.

При выполнении расчетно-графического задания (работы) студенты должны составить алгоритмы и программы вычисления усилии, напряжений и перемещений сечений бруса.

Обязательные структурные части РГЗ.

- Определение варианта расчета по двоичному коду.
- Изображение расчетной схемы в масштабе.
- Разработка алгоритма построения сетки для разрывной функции.
- Вычисление значений функции по участкам.
- Численное интегрирование табличной функции.

В рамках второго РГЗ студенты должны вычислить из нелинейного уравнения в виде равенства нулю определителя системы однородных СЛАУ собственные значения (частоты колебаний) и построить собственные функции в задаче о колебаниях стержня.
Обязательные структурные части РГЗ.

- Составление определителя системы по варианту задания
- Составления алгоритма и программы поиска корней нелинейного уравнения
- Нормирование собственных функций
- Построение форм колебаний

2. **Критерии оценки**

- Работа считается **не выполненной,** если выполнены не все части РГЗ(Р), отсутствует описание алгоритмов и программ, допущены грубые ошибки в результатах, оценка составляет менее 0,25 максимального балла, указанного в БРС.
- Работа считается выполненной **на пороговом** уровне, если части РГЗ(Р) выполнены формально: не приведено описание алгоритмов, допущены неточности в результатах, оценка составляет более 0,25 максимального балла, указанного в БРС.
- Работа считается выполненной **на базовом** уровне, если содержит все обязательные структурные части, не содержит неточностей, оценка составляет менее 0,75 максимального балла, указанного в БРС.
- Работа считается выполненной **на продвинутом** уровне при качественном оформлении и безошибочном выполнении всех структурных частей РГР, оценка составляет более 0.75 балла, указанного в БРС.

3. **Шкала оценки**

В общей оценке по дисциплине баллы за РГЗ(Р) учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, приведенными в рабочей программе дисциплины.

4. **Задание для РГЗ(Р) №1**

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.

ЗАДАНИЕ: вычислить таблицы значений и построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ и перемещений u поперечных сечений прямого бруса (рис. 1).

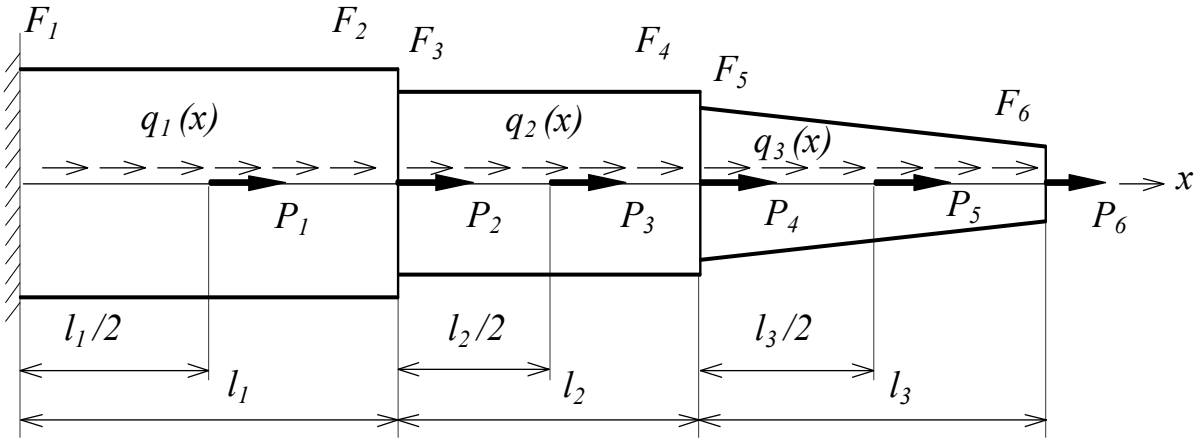


Рис. 1

Геометрически брус можно разделить на три участка. На i-ом участке (i =1, 2, 3) длиной l_i заданы F_{2i+1} , F_{2i} - площади левого и правого сечений участка бруса (на каждом участке принят линейный закон измененения площади по длине); P_{2i+1} , P_{2i} - сосредоточенные силы, приложенные в соответствии со схемой (рис. 1); q_i (x) - продольная распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (заданы k_i - тангенс наклона в уравнении прямой и b_i - значение q_i на левой границе участка).

Для вычисления значений N, σ, u необходимо воспользоваться следующими соотношениями:

$$N(x) = \int_{x}^{l_1+l_2+l_3} q(x)dx + \sum P_j \qquad (1)$$

В сумме (1) учитываются все сосредоточенные силы, приложенные на участке от x до $l_1+l_2+l_3$.

$$\sigma(x) = N(x) / F(x) \qquad (2)$$

$$u\,(x) = \frac{1}{E}\int_{0}^{x} \sigma\,(x)d\,x \qquad (3)$$

Для решения задачи требуется разбить брус на m силовых участков (в общем случае m = 6) и на каждом участке силовом вычислить требуемые величины. Решение представить в виде таблицы и эпюр. На каждом силовом участке рассчитать не менее трех точек.

Для определения варианта задания порядковый номер по групповому журналу перевести в двоичный код и дополнить нулями до 6-ти позиций (например №3=000011). В зависимости от значений в каждой позиции (0 или 1) по таблице определить исходные данные. (E=1.1·10 ^{8} кН / м ^{2})

№ позиции	1-ая			2-ая			3-ья		
значения в позиции	l_1	$F_1 \cdot 10^4$	$F_2 \cdot 10^4$	l_2	$F_3 \cdot 10^4$	$F_4 \cdot 10^4$	l_3	$F_5 \cdot 10^4$	$F_6 \cdot 10^4$
	м	$м^2$	$м^2$	м	$м^2$	$м^2$	м	$м^2$	$м^2$
0	0.5	5	3	0.4	4	3	0.5	3	3
1	0.3	4	4	0.7	5	3	0.4	4	2

№ позиции	4-ая				5-ая				6-ая			
значения в позиции	P_1	P_2	k_1	b_1	P_3	P_4	k_2	b_2	P_5	P_6	k_3	b_3
	кН	кН	$кН/м^2$	кН/м	кН	кН	$кН/м^2$	кН/м	кН	кН	$кН/м^2$	кН/м
0	0	10	5	2	0	-5	-4	-4	0	20	-5	-3
1	10	-10	0	0	-10	20	0	5	15	-5	0	0

При решении задачи возможны многие варианты программ. Рассмотрим на примере упрощенной схемы бруса (рис. 2) алгоритм одного из них.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

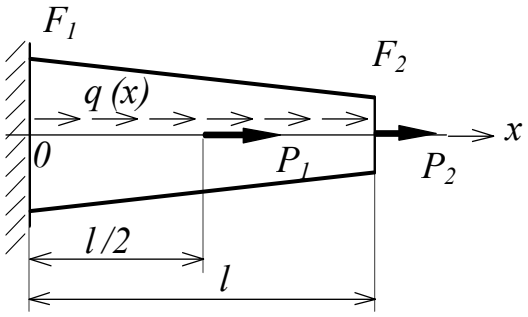


Рис. 2

Исходные данные: l = 1м , F_1= $4 \cdot 10^{-4}$ $м^2$, F_2 = $2 \cdot 10^{-4}$ $м^2$, P_1 = 10 Кн , P_2 = -20 Кн , k = 5 Кн / $м^2$, b = -5 Кн / м .

Уравнение изменения площади поперечного сечения бруса F(x) запишется в виде

$$F(x) = -2 \cdot 10^{-4} x + 4 \cdot 10^{-4}$$

Закон изменения распределенной нагрузки

$$q(x) = 5x - 5$$

Так как при $x = l / 2$ в точке приложения силы P_1 продольная сила N терпит разрыв, брус необходимо разбить на два силовых участка: 1-ый участок $0 < x < l / 2$; 2-ой участок $l / 2 < x < l$. При этом в точке $x = l / 2$ величины N и σ необходимо вычислить дважды: слева и справа от точки.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ.

Введем в рассмотрение массив $X(6)$, элементы которого числено равны координатам точек в которых вычисляются N , σ , u . При трех точках на каждом участке и равномерной сетке получим:

$$x_1 = 0,\ x_2 = l / 4,\ x_3 = l / 2,\ x_4 = l / 2,\ x_5 = 3l / 4,\ x_6 = l .$$

Для вычислений и хранения усилий, напряжений и перемещений в точках x_i , будем использовать массивы $N(6)$, $\sigma(6)$, $u(6)$.

Вычисление усилий методом сечений удобно начинать со свободного конца бруса. Из расчетной схемы видно, что

$$N_6 = P_2 .$$

Для N_5 из (1) имеем:

$$N_5 = N_6 + \int_{x_5}^{x_6} q(x)dx$$

Вычисляя последний интеграл по формулам трапеций с использованием значений функции $q(x)$ только на концах отрезка интегрирования

(т. к. $q(x)$ - линейная функция, то результат будет точным), получим

$$N_5 = N_6 + [q(x_6) + q(x_5)]\, h / 2$$

где $h = x_6 - x_5$ - шаг интегрирования. В рассматриваемом случае для равномерности сетки независимо от пределов интегрирования шаг постоянен и равен $h = l / 4$.

Для N_4 аналогично получим формулу

$$N_4 = N_5 + [q(x_5) + q(x_4)]\, l / 8$$

В точке разрыва имеем: $N_3 = N_4 + P_1$

и далее: $N_2 = N_3 + [q(x_3) + q(x_2)]\, l / 8$

$$N_1 = N_2 + [q(x_2) + q(x_1)]\, l / 8$$

Если увеличить длину массива N на единицу и ввести значение $N_7 = 0$, то вместо $N_6 = P_2$ получим $N_6 = N_7 + P_2$.

Тогда можно независимо от количества силовых участков и точек разбиения внутри участков записать следующие рекуррентные формулы для определения усилий в поперечных сечениях бруса:

$N_{m\cdot k+1} = 0$ - значение усилий за пределом бруса;

$N_{j\cdot k} = N_{j\cdot k+1} + P_j$, j = m, m-1, ... ,1 - при переходе через j-ый стык (стык j-го и j+1 -го силовых участков);

$N_i = N_{i+1} + [q(x_{i+1}) + q(x_i)]\, h / 2$, $i = j\cdot k + 1, \ldots, (j-1)\cdot k + 1$ - для точек внутри j-го силового участка.

Здесь: m - число участков; k - количество точек на участке; h - шаг разбиения. Если при разбиении используется неравномерная сетка, то $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Зная усилия и напряжения (последние определяются в соответствии с формулой (2)), можно вычислить перемещения в контрольных точках по формуле (3). При интегрировании по формуле трапеций (в данном случае это приводит к определенной ошибке) получим:

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = u_1 + [\sigma_1 + \sigma_2]\, l / (8E), \quad u_3 = u_2 + [\sigma_2 + \sigma_3]\, l / (8E)$$

$$u_4 = u_3, \qquad u_5 = u_4 + [\sigma_4 + \sigma_5]\, l / (8E), \quad u_6 = u_5 + [\sigma_5 + \sigma_6]\, l / (8E)$$

или в общем случае:

$u_1 = 0$, - в начале отрезка;

$u_i = u_{i-1} + [\sigma_{i-1} + \sigma_i]\, h / (2E)$, i от $(j-1)\cdot k + 2$ до $j\cdot k$ с шагом 1- внутри j-го участка; (6)

$u_{j\cdot k+1} = u_{j\cdot k}$, j = m, m-1, ... ,1 - при переходе через j-й стык . (7)

Для обобщения формулы (7) на последний участок необходимо увеличить длину массива u до m+1.

После того, как выписаны все необходимые формулы, можно предложить следующий алгоритм вычислений:

- Описание массивов X (6) , N (7) , σ (6) , u (7) , P (6) .
- Описание функций $F(x)$, $q(x)$.
- Задание исходных данных (массивов X , P, значений k , m , l).
- Вычисление элементов массива N :σ

  внешний цикл по j от m до 1 с шагом -1

  $N_{j\cdot k} = N_{j\cdot k+1} + P_j$

  внутренний цикл по i от $j\cdot k + 1$ до $(j-1)\cdot k + 1$ с шагом -1

  $N_i = N_{i+1} + [q(x_{i+1}) + q(x_i)]\, h / 2$

  конец внутреннего цикла

  конец внешнего цикла.
- Вычисление элементов массива σ по формулам (2) :

цикл по i от 1 до m·k с шагом 1

- Вычисление элементов массива u :

$u_1 = 0$

внешний цикл по j от 1 до m с шагом 1

внутренний цикл по i от (j -1)·k +2 до j·k с шагом 1

$u_i = u_{i-1} + [\sigma_{i-1} + \sigma_i]\, h /(2E)$

конец внутреннего цикла

$u_{j\cdot k+1} = u_{j\cdot k}$

конец внешнего цикла.

- Печать значений x_i , N_i , σ_i , u_i :

цикл по i от 1 до 6 с шагом 1

В качестве альтернативного можно предложить следующий вариант решения задачи. Интеграл, входящий в формулу для усилий (1) , вычислить аналитически. Это позволяет выражение для вычислений напряжений оформить в программе как функцию. Перемещения при этом можно вычислять не по формуле трапеций по трем точкам на участке (как в предыдущей программе), а используя более точный метод (например, стандартную программу метода Гаусса QG8).

5. **Задание для РГЗ(Р) №2**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ БАЛКИ.

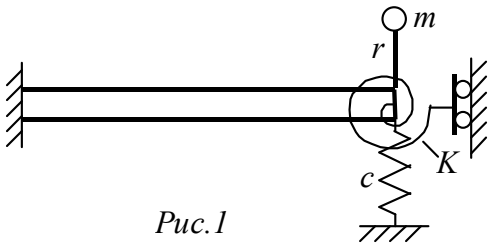


Рис.1

Обозначения:

Y(x) - прогиб оси балки;

EJ - жесткость балки на изгиб;

l - длина балки;

ρF - погонная масса;

m - сосредоточенная масса;

r - длина жесткого рычага - расстояние между осью балки и массой *m*;

c - линейная жесткость упругой опоры;

K - угловая жесткость упругой опоры;

$z = x/l$ - безразмерная координата ($0 \le z \le 1$).

При решении задач на определение собственных форм колебаний упругих балок функцию прогиба удобно записывать через функции Крылова S(x), T(x), U(x), V(x), которые представляют собой линейные комбинации гиперболических и тригонометрических синусов и косинусов:

$$S(x) = [ch(x) + \cos(x)] / 2, \quad T(x) = [sh(x) + \sin(x)] / 2$$
$$U(x) = [ch(x) - \cos(x)] / 2, \quad V(x) = [sh(x) - \sin(x)] / 2. \qquad (1)$$

Собственные формы $Y(z)$ колебаний консольной балки (рис.1) через функции Крылова определяются как

$$Y(z) = U(\alpha z) + D V(\alpha z) \qquad (2)$$

Параметры α и D зависят от граничных условий на правом конце балки. Собственные значения α (безразмерные собственные частоты) определяются из следующего характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{V}(\alpha)+\left(f\alpha-\frac{g}{\alpha^3}\right)\mathrm{U}(\alpha) & \mathrm{S}(\alpha)+\left(f\alpha-\frac{g}{\alpha^3}\right)\mathrm{V}(\alpha) \\ \mathrm{S}(\alpha)-\left(w\alpha^3-\frac{q}{\alpha}\right)\mathrm{T}(\alpha) & \mathrm{T}(\alpha)-\left(w\alpha^3-\frac{q}{\alpha}\right)\mathrm{U}(\alpha) \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

где f,g,w,q-безразмерные параметры: $f = m/\rho Fl$, $g = cl^3/EJ$, $w = f(r/l)^2$, $q = Kl/EJ$.

Уравнение (3) имеет бесчисленное множество положительных корней α, i =1,2,3, ... Для каждого значения а коэффициент D определяется из уравнения

$$\mathrm{V}(\alpha)+\left(f\alpha-\frac{g}{\alpha^3}\right)\mathrm{U}(\alpha)+D\left[\mathrm{S}(\alpha)+\left(f\alpha-\frac{g}{\alpha^3}\right)\mathrm{V}(\alpha)\right]=0 \qquad (4)$$

Каждой паре значений α и D соответствует своя собственная форма Y(z), которая определяется с точностью до множителя. Собственные формы можно пронормировать, например, так, чтобы максимальное значение нормированной формы было равно единице. Тогда для нормированной формы можно записать следующее выражения

$$Y(z) = Y(z)/B = [\mathrm{U}(\alpha z) + D\mathrm{V}(\alpha z)] / B \qquad (5)$$

$$B = \max|Y(z)| \quad (6)$$

Точкой α, в которой функция $Y(z)$ принимает максимальное по модулю значение B, может быть либо экстремум функции, либо точка z =1. В первом случае для определения z необходимо найти корни уравнения $Y'(z)$=0, или в развернутом виде

$$\mathrm{T}(\alpha z) + D\mathrm{U}(\alpha z) = 0 \qquad (7)$$

Так как корней на отрезке 0 < z < 1 может быть несколько (в вариантах задания - не более трех), то необходимо найти все. Затем из найденных точек и точки z = 1 выбрать в качестве z ту, в которой $|Y(z)|$ принимает максимальное значение.

Можно использовать и другой способ нормирования, при котором коэффициент B вычисляется по формуле

$$B = \int_0^1 [Y(z)]^2\,dz \qquad (8)$$

Если собственная форма имеет узлы (точки, где функция $Y(z)$ меняет знак), то интеграл от 0 до 1 надо вычислять как сумму интегралов по участкам между узлами. Поэтому сначала необходимо найти эти узлы, т.е. корни уравнения (2). В зависимости от варианта задания на отрезке от 0 до 1 их может быть не более двух.

ЗАДАНИЕ. Для своего варианта исходных данных вычислить три первых собственных значения α из уравнения (3) и построить графики соответствующих собственных нормированных форм.

ВЫБОР ВАРИАНТА ЗАДАНИЯ. Переведите номер по групповому журналу из десятичной в двоичную систему исчисления. Запишите перед полученным числом нули

так, чтобы получился пятизначный код. По двоичным значениям в каждой позиции кода определяются исходные данные (до 23-го варианта):

N позиции (слева направо)	1	2	3	4	5
Параметр	f	w	g	q	способ нормир.
0 в позиции	1	0	0	0	(6)
1 в позиции	0	1	1	1	(8)

РЕКОМЕНДАЦИИ к составлению программы. Для решения нелинейных уравнений можно использовать подпрограммы отделения корней и метода половинного деления (см. задачу 5), для численного интегрирования - подпрограмму метода Гаусса (см. задачу 6). Необходимо также составить подпрограммы-функции и (или) подпрограммы для вычисления: функций Крылова; функций (2),(3),(5),(7); подынтегральной функции в формуле (8); коэффициента *B* по формулам (6) либо (8).

В головной программе требуется описать массивы:

- A(3) -= для собственных значений α;
- D(3) - для коэффициентов *D*;
- Z0(3) - для точек экстремумов (или узлов);
- Y0(3) – для значений функции *Y* в точках экстремумов;
- B(3) - для коэффициентов *B* в формулах (6) или (8).

Алгоритм может быть построен по следующей схеме. В цикле по номеру формы (i=1,2,3) вычисляются:

- A(i) - собственное значение α;
- D(i) - коэффициент *D*;
- k значений Z0 и Y0 - точки экстремумов i-ой формы и значения функции *Y* в этих точках ($k \le 3$ - зависит от номера формы) или k значений координат узлов i-ой формы ($k \le 2$);
- B(i) - коэффициент *B* по формуле (6) или (8). Все результаты выводятся на печать.

После завершения цикла по i вычисляются при изменении *z* от 0 до 1 с шагом не более 0.1 и печатаются в таблицу ординаты трех собственных форм. При этом для записи и хранения текущих значений можно использовать массив Z0 или Y0.